Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo 2001

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-3111—Primer Parcial —

1. (16 pts) Sea f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{si} \quad -\pi \leq x < -\pi/2, \\ -x & \text{si} \quad -\pi/2 \leq x < 0, \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi/2, \\ \pi\ x & \text{si} \quad \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

   a) (3 pts) Haga un gráfico de la función f.

   b) (8 pts) En dicho intervalo, podemos escribir la función f como

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx$$

   Calcule $a_n,\ b_n,$ y c_n.

   c) (5 pts) Demuestre la identidad $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi^4}{96}$

2. (14 pts)

   a) (5 pts) Sea u una función causal que satisface $u''_{gen} = f$.

   Muestre que si $R(t) = tH(t)$ entonces $u(t) = (R * f)(t)$

   b) (9 pts) Considere la función $f(t) = (H(t) - H(t-1))t$ y la función $g(t) = t,$ si $-1 \leq t \leq 1$ y $g(t) = 0$ en cualquier otro caso. Sea $u = f * g$. Calcule u''_{gen} y usando la parte (a) obtenga u.

3. (20 pts) Sea $\omega > 0$ y la función f dada por

$$f(t) = (H(t) - H(t - \pi/\omega)) \operatorname{sen}(\omega t)$$

   a) (3 pts) Haga un gráfico de f para el caso particular $\omega = 1$.

   b) (7 pts) Calcule la transformada de Laplace $F(z)$ de la función f.

   c) (7 pts) Se desea resolver la ecuación

$$u''_{gen}(t) + \omega^2 u(t) = \delta(t) + \delta\left(t - \frac{\pi}{\omega}\right).$$

   Calcule la transformada de Laplace $U(z)$ de la función u.

   d) (3 pts) Usando la parte (b) encontrar la función $u(t)$.

4. Consideremos $w(x,y,t) = J_0(\sqrt{x^2+y^2})T(t)$ donde $J_0(r)$ es la función de Bessel de orden cero. Para cada problema determine la función $T(t)$ que sirva:

   a) (3 pts) $w_t = a(w_{xx} + w_{yy}),\ w(0,0,0) = b$, con $a > 0$ y $b > 0$.

   b) (4 pts) $w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} = -5w, w(x,y,0) = 0,\ w_t(x,y,0) \neq 0$.

   c) (3 pts) $w_{tt} = w_{xx} + w_{yy},\ w(x,y,0) \neq 0,\ w_t(x,y,0) = 0$.